

**Muster - Feststellungsprüfung**  
**Fach Mathematik**  
**W-Kurs**

**Bearbeitungszeit:**  
**Erlaubte Hilfsmittel:**

**180 Minuten**  
**(nicht graphikfähiger) Taschenrechner, Tafelwerk**

**1. Kleinere vermischte Aufgaben**

**1.1.** Berechnen Sie die 1. Ableitungen der Funktionen

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x^2 + 1) \cdot (e^{1+x^2})^{-2},$$

$$g(x) = (x \cdot \ln x)^{\ln x}.$$

**1.2.** Gegeben sei die Funktion  $f(x, y) = (\ln x)^2 \cdot e^{3y^2} + (\ln y)^2 \cdot e^{2x^3} + \frac{x+y}{xy}$ .

Berechnen Sie  $\frac{\partial f}{\partial y}$  und  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .

**1.3.** Für ein Polynom 3. Grades  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ist bekannt:

# P(-1;2) und Q(2;3) sind Punkte des Funktionsgraphen,

# für  $x = 1$  und  $x = -2$  besitzt der Funktionsgraph horizontale Tangenten.

Zu ermitteln sind die Koeffizienten a, b, c und d.

Stellen Sie nur das lineare Gleichungssystem zur Problemlösung auf.

**1.4.** Gegeben sei das homogene lineare Gleichungssystem (es sei  $a \neq 0, b \neq 0$ )

$$ax + by = \lambda x$$

$$bx + ay = \lambda y.$$

Für welche reellen  $\lambda$  ist das lineare Gleichungssystem nicht trivial lösbar?

**1.5.** Berechnen Sie  $\int_0^1 \begin{vmatrix} 0 & x & x & x \\ x & 0 & x & x \\ x & x & 0 & x \\ x & x & x & 0 \end{vmatrix} dx$ .

**1.6.** Für die Matrizengleichung  $A \bullet B \bullet C = D \bullet E$ ,  $E$  als Einheitsmatrix ist quadratisch, seien die Typen  $\tau(B) = (4,3)$  und  $\tau(D \bullet E) = (5,5)$  bekannt. Ermitteln Sie, sofern möglich, die Typen der Matrizen  $A, C$  und  $D$ .

**1.7.** Existiert zur Matrix  $A = \begin{pmatrix} 0 & x & x & x \\ x & 0 & x & x \\ x & x & 0 & x \\ x & x & x & 0 \end{pmatrix}$  eine inverse Matrix  $A^{-1}$ ? Begründen Sie

Ihren Standpunkt!

## 2. Finanzmathematik

**2.1.** Ein Vater, der im Besitz von 6.000 € ist, rechnet sich fiktiv aus, welches Kapital er nach neunjähriger Laufzeit bei 8 % Zinsen (über den gesamten Zeitraum unveränderlich) erhalte. Dieser Betrag entspricht seinen Vorstellungen, denn er möchte seinen Sohn nach dem heute begonnenen 9-semestrischen, also  $4\frac{1}{2}$ -jährigen, Studium diesen Geldbetrag als Starthilfe ins Leben zukommen lassen. Nur ist leider bei verkürzter Anlagezeit der Zinssatz erheblich niedriger; für Geldanlagen von mindestens 4 Jahren, aber höchstens 6 Jahren wird ein Zinssatz von 2,25 % p. a. angeboten. Er muss also seinen Bruder überzeugen, sich an der Kapitalanlage zu beteiligen. Mit welchem Betrag muss der Bruder sich beteiligen, damit die Vorstellungen unseres Vaters realisiert werden können?

**2.2.** Ein Sohn, der - leider - kein gutes Verhältnis zu seinem Stiefvater hat, weiß, dass sein Stiefvater das elterliche Haus mit einer Hypothek belastet hat. Am Biertisch hat der Stiefvater erzählt, von seiner Bank einen Zinssatz von 6 % p. a. über die 15-jährige Laufzeit erhalten zu haben. Über diese Information verfügt der Sohn. Von seiner Mutter erhält er die Auskunft, dass die Zinsen am Ende des 1. Jahres 3.000 €, am Ende des 2. Jahres 2.871 € betragen haben. Helfen Sie dem Sohn, die Höhe des Hypothekendarlehens zu ermitteln.

## 3. Kurvendiskussion

Gegeben sei die Funktion  $y = f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 2x - 3$ .

a) Zeigen Sie, dass  $-2$  Nullstelle ist.

b) Erarbeiten Sie die Skizze der Funktion  $f$  sowie die Skizzen der Ableitungsfunktionen  $f'$  und  $f''$  in einem kartesischen Koordinatensystem.

Ihre Untersuchungen für die Funktion  $f$  muss mindestens umfassen

- Grenzverhalten gegen Unendlich,
- Nullstellen,
- lokale Extrema,
- den Wendepunkt.

Ihre Untersuchungen für die Funktion  $f'$  muss mindestens umfassen

- Nullstellen,
- den Scheitelpunkt der Funktion.

c) Die Graphen von  $f$  und  $f'$  schließen mit der x-Achse im IV. Quadranten einen Flächeninhalt ein. Markieren Sie in der Skizze aus Teil b) diesen Flächeninhalt. Geben Sie den Ansatz zur Flächeninhaltsberechnung an; dieser umfasst Integranden und Integrationsgrenzen.

d) Berechnen Sie den im III. Quadranten vom Graphen von  $f'$  und den Koordinatenachsen eingeschlossenen Flächeninhalt.

## 4. Lineare graphische Optimierung

4.1. Gegeben sei die Zielfunktion  $z = 6x + 4y$  mit den Nebenbedingungen

$$(1) \quad 3x + 2y \leq 45$$

$$(2) \quad 2x + y \geq 10$$

$$(3) \quad y \geq 2$$

$$(4) \quad 3x + 2y \leq 54$$

$$(5) \quad -x + y \leq 10$$

sowie den Nicht-Negativitätsbedingungen

$$(6) \quad x \geq 0$$

und

$$(7) \quad y \geq 0.$$

a) Übertragen Sie alle 7 Ungleichungen in ein kartesisches Koordinatensystem. Markieren Sie die Menge aller Punkte, die allen 7 Bedingungen genügt. Nennen Sie die überflüssigen Bedingungen.

Für die folgenden Bearbeitungen dieser Teilaufgabe ist die Niveaulinie  $z = 60$  als Startgerade zu nutzen.

Für die graphische Bearbeitung ist die Skizze aus a) zu ergänzen.

b) Ermitteln Sie die Lösung des Minimalproblems graphisch und rechnerisch.

c) Ermitteln Sie die Lösungsmenge des Maximalproblems unter der Zusatzbedingung, dass die  $x$ -Werte positiv-ganzzahlig sind.

d) Ermitteln Sie die Lösungsmenge des Maximalproblems unter den Zusatzbedingungen, dass sowohl die  $x$ -Werte als auch die  $y$ -Werte positiv-ganzzahlig sind.

4.2. Es werde nur die Ungleichung (4) ersetzt durch

$$(4^*) \quad 3x + 2y \geq 54.$$

Welche Änderungen ergeben sich hinsichtlich Lösbarkeit und Lösungsmenge sowohl für das Minimal- als auch das Maximalproblem?

4.3. Geändert werde jetzt in 4.1. nur die Zielfunktion, diese sei für diese Teilaufgabe  $z = x + y$ ; das System der Bedingungen  $\{(1),(2),\dots,(7)\}$  bleibt somit unverändert.

Welche Änderungen ergeben sich hinsichtlich Lösbarkeit und Lösungsmenge sowohl für das Minimal- als auch das Maximalproblem?

Hinweis: Es wird empfohlen, die Skizze aus 4.1. in mindestens einer weiteren Farbe zu ergänzen!